suites arithmético-géométriques : découverte

CORRIGÉ DES EXERCICES

Cette séquence est intitulée [suites arithmético-géométriques : découverte] et correspond aux fichiers et à la vidéo [suites-arithm-geom] de la playlist [LeMathoscope analyse lycée]

Elle est destinée à : des élèves de première sépcialité maths voulant comprendre les suites du type $u_{n+1}=a\,u_n+b$ et les histoires de suite auxiliaire, notion très classique dans les exercices de ce chapitre.

Elle explique pourquoi et comment on utilise ces suites auxiliaires du type $v_n=u_n-\alpha$, par une approche « avec les mains » assez pédagogique. Pour bien comprendre, et pour s'entraîner.

- Les fichiers sont téléchargeables ici : lemathoscope.com-ftp
  (un fichier énoncé + un fichier corrigé (son nom se termine par -c), chacun au format .pdf ou .html à votre convenance).
- Les playlists sont visibles ici : YOUTUBE LeMathoscope
- Retrouvez toutes les séquences LEMATHOSCOPE ici : lemathoscope.com/chaine-youtube/.

Pour chacune des lignes $(a),(b),(c),(d)$ suivantes :

1. Démontrer que (v_n) est géométrique.
2. En déduire le terme général de (u_n).
3. Vérifier sur le calcul de u_3.

(a)	$u_{n+1}=1,5\,u_n-2$	$u_0=10$	$v_n=u_n-4$
(b)	$u_{n+1}=0,5\,u_n+1,5$	$u_0=20$	$v_n=u_n-3$
(c)	$u_{n+1}=\dfrac{2}{3}(u_n+9)-3$	$u_0=-2$	$v_n=u_n-9$
(d)	$u_{n+1}=3\,u_n-2$	$u_0=4$	$v_n=u_n-1$

TABLE DES MATIÈRES

Suite | (a) | $u_{n+1}=1{,}5u_n-2$ | $u_0=10$ | $v_n=u_n-4$ |

$v_{n+1}=u_{n+1}-4=1,5\,u_n-2-4=1,5\,u_n-6=1,5\,(u_n-4)=1,5\,v_n$ on a donc $v_{n+1}=q\,v_n$ avec $q=1,5$
donc $v_n=6\times 1,5^n$ donc maintenant $\boxed{u_n=4+6\times 1,5^n}$
vérification, calculons u_1 de deux manières :

- par récurrence, avec l'énoncé, $u_1=1,5\times u_0-2=15-2=13$;
- avec le terme général, $u_1=4+6\times 1,5=4+9=13$.

Vérifions :

- pour $n=0$ ça donne $u_0=4+6\times 1=10$ BINGO
- pour $n=1$ cela donne $u_1=4+6\times\frac{3}{2}=4+9=13$ BINGO
- pour $n=2$ cela donne $u_2=4+6\times\frac{9}{4}=4+\frac{3\times 9}{2}=\frac{8+27}{2}=\frac{35}{2}=17,5$ BINGO

Suite | (b) | $u_{n+1}=0{,}5u_n+1{,}5$ | $u_0=20$ | $v_n=u_n-3$ |

$v_{n+1}=u_{n+1}-3=0,5\,u_n+1,5-3=0,5\,u_n-1,5=0,5\,(u_n-3)$ car $3\times 0,5=1,5$

On a montré que $v_{n+1}=0,5\,v_n$ donc $v_n=0,5^n\times v_0$ or $v_0=u_0-3=17$ et ainsi $v_n=17\times 0,5^n$ qu'on peut écrire aussi $v_n=\frac{17}{2^n}$, reste à conclure avec le terme général de u_n en écrivant $u_n=3+\frac{17}{2^n}$.

Vérification avec la calculatrice :
calculons de deux manières u_{10} :

- avec le terme général : $u_{10}=3+\frac{17}{2^{10}}=3+\frac{17}{1024}\approx 3,01601563$;
- avec la relation de récurrence (à droite ci-contre) on trouve pareil.

```
20 EXE          -> u0
*0.5 +1.5 EXE -> u1
EXE             -> u2
EXE             -> ...
```

Suite | (c) | $u_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n+9)-3$ | $u_0=-2$ | $v_n=u_n-9$ |

$v_{n+1}=u_{n+1}-9=\frac{2}{3}(u_n+9)-3-9=\frac{2}{3}(u_n-9)$ après simplifications, et donc $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ or $v_0=-11$, donc, avec la formule du terme général d'une suite géométrique : $v_n=-11\times\frac{2^n}{3^n}$ d'où $\boxed{u_n=9-11\times\frac{2^n}{3^n}}$.

Je prend soin de vérifier en calculant u_0 et u_1 d'une part avec la relation de récurrence d'autre part avec cette formule.

Suite | (d) | $u_{n+1}=3u_n-2$ | $u_0=4$ | $v_n=u_n-1$ |

$v_{n+1}=u_{n+1}-1=3\,u_n-2-1=3\,(u_n-1)=3\,v_n$ et $v_0=3$ d'où $u_n=1+3^{n+1}$, là aussi je vérifie :

- $u_1=3\times 4-2=10$ et $1+3^{1+1}=1+9=10$ BINGO.